

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction – Généralités</b>	<b>11</b>
1.1	Introduction . . . . .	13
1.2	Ensembles – Relations . . . . .	13
1.3	Relation binaire sur un ensemble $E$ . . . . .	16
1.4	Lois de composition – Structures d'ensembles . . . . .	21
1.5	Applications et fonctions . . . . .	26
1.6	Exercices . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Analyse combinatoire</b>	<b>37</b>
2.1	Introduction . . . . .	39
2.2	Raisonnement par récurrence . . . . .	39
2.3	Définition de la factorielle . . . . .	39
2.4	Arrangements ou permutations . . . . .	40
2.5	Combinaisons . . . . .	42
2.6	Formule du binôme de Newton . . . . .	43
2.7	Applications du binôme de Newton . . . . .	43
2.8	Exercices . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Les nombres complexes</b>	<b>51</b>
3.1	Introduction . . . . .	53
3.2	Ensemble des entiers naturels positifs $\mathbb{N}$ . . . . .	53
3.3	Anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ . . . . .	53
3.4	Corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ . . . . .	53
3.5	Corps des nombres réels $\mathbb{R}$ . . . . .	54
3.6	Corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ . . . . .	54
3.7	Représentation géométrique . . . . .	56
3.8	Nombre complexe conjugué . . . . .	57
3.9	Représentation trigonométrique . . . . .	58
3.10	Forme algébrique et forme trigonométrique . . . . .	62
3.11	Formule de De Moivre . . . . .	63
3.12	Notation exponentielle d'un nombre complexe . . . . .	65
3.13	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe . . . . .	66
3.14	Corps algébriquement clos . . . . .	67
3.15	Racines carrées d'un nombre complexe . . . . .	67
3.16	Équations du second degré dans $\mathbb{C}$ . . . . .	69
3.17	Formules d'Euler . . . . .	70
3.18	Linéarisation des polynômes . . . . .	70
3.19	Exercices . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Fonctions numériques</b>	<b>81</b>
4.1	Généralités . . . . .	84
4.2	Fonctions d'une variable réelle . . . . .	84
4.3	Algèbre des fonctions continues . . . . .	93
4.4	Continuité uniforme d'une fonction . . . . .	97
4.5	Fonctions réciproques . . . . .	98
4.6	Algèbre des fonctions dérivables . . . . .	99

4.7	Dérivée sur un intervalle fermé . . . . .	102
4.8	Dérivée et sens de variation d'une fonction . . . . .	103
4.9	Dérivée d'ordre supérieur – Formule de Leibniz . . . . .	104
4.10	Fonctions indéfiniment continûment dérivables . . . . .	105
4.11	Dérivée d'une composée de fonctions . . . . .	105
4.12	Dérivée d'une fonction réciproque . . . . .	106
4.13	Dérivée d'une fonction homographique . . . . .	107
4.14	Plan d'étude d'une fonction . . . . .	108
4.15	Fonctions convexes . . . . .	110
4.16	Exercices . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Fonctions circulaires réciproques</b> . . . . .	<b>121</b>
5.1	Introduction . . . . .	123
5.2	Étude de la fonction arcsin . . . . .	123
5.3	Étude de la fonction arccos . . . . .	124
5.4	Étude de la fonction arctg . . . . .	124
5.5	Étude de la fonction arccotg . . . . .	125
5.6	Remarques sur les dérivées . . . . .	125
5.7	Formules importantes . . . . .	126
5.8	Exercices . . . . .	127
5.9	Graphes des fonctions circulaires – Graphes des fonctions réciproques . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Théorème de Rolle – Accroissements finis</b> . . . . .	<b>134</b>
6.1	Théorème de Rolle . . . . .	136
6.2	Théorème des accroissements finis . . . . .	138
6.3	Généralisation de la formule des accroissements finis . . . . .	139
6.4	Théorème de Guillaume de L'Hôpital . . . . .	140
6.5	Applications du théorème de Lagrange . . . . .	142
6.6	Développements « asymptotiques » . . . . .	144
6.7	Exercices . . . . .	145
<b>7</b>	<b>Primitives – Intégrales</b> . . . . .	<b>149</b>
7.1	Introduction . . . . .	151
7.2	Définition de la primitive d'une fonction . . . . .	151
7.3	Définition de l'intégrale d'une fonction . . . . .	152
7.4	Propriétés fondamentales . . . . .	154
7.5	Espace vectoriel des fonctions intégrables . . . . .	154
7.6	Théorèmes de la moyenne . . . . .	155
7.7	Intégrale d'une fonction bornée . . . . .	159
7.8	Intégrale de Riemann . . . . .	159
7.9	Théorème de Schwarz . . . . .	161
7.10	Intégrale d'une fonction réelle à valeurs complexes . . . . .	161
7.11	Exercices . . . . .	163
<b>8</b>	<b>Logarithmes et exponentielles</b> . . . . .	<b>174</b>
8.1	Logarithme népérien . . . . .	176
8.2	Étude de la fonction $f(x) = \ln  x $ . . . . .	180
8.3	Fonction logarithme de base $a$ . . . . .	180
8.4	Fonction exponentielle de base quelconque . . . . .	182
8.5	Étude de la fonction exponentielle népérienne . . . . .	183
8.6	Importance de la fonction exponentielle . . . . .	187
8.7	Fonction exponentielle généralisée . . . . .	187
8.8	Comparaison des fonctions puissance et exponentielle . . . . .	187
8.9	Exercices . . . . .	188

<b>9 Fonctions hyperboliques</b>	<b>195</b>
9.1 Définition des fonctions hyperboliques . . . . .	197
9.2 Étude de la fonction cosinus hyperbolique . . . . .	199
9.3 Étude de la fonction sinus hyperbolique . . . . .	201
9.4 Étude de la fonction tangente hyperbolique . . . . .	203
9.5 Étude de la fonction cotangente hyperbolique . . . . .	203
9.6 Analogie entre fonctions circulaires et hyperboliques . . . . .	204
9.7 « Trigonométrie » hyperbolique . . . . .	205
9.8 Linéarisation des polynômes en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ . . . . .	208
9.9 Existence des fonctions réciproques . . . . .	209
9.10 Fonction argument cosinus hyperbolique . . . . .	209
9.11 Fonction argument sinus hyperbolique . . . . .	211
9.12 Fonction argument tangente hyperbolique . . . . .	212
9.13 Fonction argument cotangente hyperbolique . . . . .	212
9.14 Recherche de primitives . . . . .	213
9.15 Dérivées et différentielles usuelles . . . . .	214
9.16 Exercices . . . . .	215
<b>10 Développements limités</b>	<b>221</b>
10.1 Utilité des développements limités . . . . .	223
10.2 Définitions . . . . .	223
10.3 Unicité d'un développement limité . . . . .	224
10.4 Existence d'un développement limité . . . . .	224
10.5 Développements limités des fonctions usuelles . . . . .	225
10.6 Théorèmes fondamentaux . . . . .	226
10.7 Fonctions équivalentes . . . . .	233
10.8 Recherche de partie principale . . . . .	233
10.9 Recherche de limites . . . . .	234
10.10 Exercices . . . . .	235
<b>11 Techniques de recherche de primitives</b>	<b>237</b>
11.1 Introduction . . . . .	239
11.2 Définition de la primitive d'une fonction . . . . .	239
11.3 Primitives des fonctions usuelles . . . . .	239
11.4 Primitives des fonctions trigonométriques . . . . .	239
11.5 Primitives des fonctions hyperboliques . . . . .	240
11.6 Technique de l'intégration par parties . . . . .	241
11.7 Technique du changement de variables . . . . .	242
11.8 Primitives de fonctions composées . . . . .	243
11.9 Primitives de polynômes particuliers . . . . .	244
11.10 Primitives des fractions rationnelles . . . . .	245
11.11 Intégrales abéliennes . . . . .	254
11.12 Méthodes particulières d'intégration . . . . .	257
11.13 Intégration par récurrence: formule de Wallis . . . . .	263
11.14 Exercices . . . . .	265
<b>12 Intégrales généralisées</b>	<b>267</b>
12.1 Introduction . . . . .	269
12.2 Intégrale d'une fonction non bornée . . . . .	269
12.3 Critères de convergence . . . . .	270
12.4 Convergence absolue . . . . .	270
12.5 Fonction intégrable sur un intervalle non borné . . . . .	272
12.6 Critère de convergence – Critère de Cauchy . . . . .	273
12.7 Théorèmes fondamentaux de convergence . . . . .	274
12.8 Formule de la moyenne . . . . .	276
12.9 Critère d'Abel pour les intégrales généralisées . . . . .	276

<b>13 Suites numériques réelles</b>	<b>279</b>
13.1 Suite numérique quelconque . . . . .	281
13.2 Suite numérique de nombres réels . . . . .	281
13.3 Espace vectoriel des suites numériques . . . . .	282
13.4 Algèbre des suites numériques convergentes . . . . .	282
13.5 Opérations sur les suites numériques divergentes . . . . .	285
13.6 Théorèmes fondamentaux . . . . .	285
13.7 Suites réelles monotones . . . . .	287
13.8 Suite arithmétique . . . . .	291
13.9 Suite géométrique . . . . .	292
13.10 Applications des suites numériques . . . . .	294
13.11 Suites récurrentes – Théorème du point fixe . . . . .	295
13.12 Exercices . . . . .	298
<b>14 Équations différentielles</b>	<b>307</b>
14.1 Introduction . . . . .	309
14.2 Équation différentielle – Courbe intégrale . . . . .	309
14.3 Équations différentielles du premier ordre . . . . .	309
14.4 Équations différentielles homogènes . . . . .	311
14.5 Équations différentielles linéaires du 1 <sup>o</sup> ordre . . . . .	312
14.6 Équations différentielles du deuxième ordre . . . . .	317
14.7 Exercices . . . . .	327
<b>15 Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>337</b>
15.1 Rappel – Espace vectoriel . . . . .	339
15.2 Espace vectoriel normé . . . . .	339
15.3 Espace vectoriel normé complet . . . . .	342
15.4 Fonctions vectorielles d’une variable réelle . . . . .	342
15.5 Fonctions complexes d’une variable réelle . . . . .	344
15.6 Fonctions de plusieurs variables réelles . . . . .	344
15.7 Fonctions de deux variables réelles . . . . .	345
15.8 Théorème des accroissements finis . . . . .	352
15.9 Formule de Taylor-Lagrange . . . . .	353
15.10 Extremum d’une fonction de deux variables . . . . .	354
15.11 Applications aux fonctions homogènes . . . . .	355
15.12 Fonction implicite . . . . .	356
15.13 Exercices . . . . .	357
<b>16 Fonctions différentiables</b>	<b>363</b>
16.1 Fonctions d’une variable réelle . . . . .	365
16.2 Fonctions de plusieurs variables . . . . .	367
16.3 Forme différentielle exacte . . . . .	369
16.4 Application au calcul d’erreur . . . . .	372
16.5 Exercices . . . . .	372
<b>A Compléments sur les ensembles</b>	<b>377</b>
A.1 Notions sur la puissance des ensembles . . . . .	379
A.2 Cardinal ou puissance d’un ensemble . . . . .	379
A.3 Nombres algébriques et nombres transcendants . . . . .	383
<b>B Formulaire mathématique</b>	<b>385</b>
B.1 Rappels de trigonométrie . . . . .	387
B.2 Identités remarquables . . . . .	392
B.3 Résolution d’un système linéaire . . . . .	392

<b>C</b>	<b>Réflexions sur les mathématiques</b>	<b>393</b>
C.1	L'idée de perfection logique . . . . .	395
C.2	Les langages formalisés . . . . .	395
C.3	Axiomes – Schémas – Théorèmes . . . . .	395
C.4	Théorie de la démonstration . . . . .	396
C.5	Prédicats . . . . .	398
C.6	Interprétation des formules . . . . .	399
<b>D</b>	<b>Introduction à la logique</b>	<b>403</b>
D.1	Avant-propos . . . . .	405
D.2	Formalisation de la logique – Vocabulaire . . . . .	405
D.3	Méthodes de déduction . . . . .	410
<b>E</b>	<b>Notions de probabilités</b>	<b>415</b>
E.1	Introduction . . . . .	417
E.2	Probabilités . . . . .	417
E.3	Espace probabilisable . . . . .	418
E.4	Espaces probabilisés discrets . . . . .	421
<b>F</b>	<b>Algèbre de Boole</b>	<b>427</b>
F.1	Introduction . . . . .	429
F.2	Définition . . . . .	429
F.3	Propriétés fondamentales . . . . .	429
F.4	Exemples d'algèbres de Boole . . . . .	431
F.5	Relation binaire dans une algèbre de Boole . . . . .	431
F.6	Fonctions booléennes . . . . .	434
F.7	Simplifications des expressions booléennes . . . . .	435
F.8	Exercices . . . . .	438
<b>G</b>	<b>Polynômes et fractions rationnelles</b>	<b>441</b>
G.1	Polynômes de degré $n$ . . . . .	443
G.2	Algèbre des polynômes de degré $n$ . . . . .	443
G.3	Division des polynômes . . . . .	443
G.4	Fraction rationnelle dans $\mathbb{R}$ . . . . .	444
<b>H</b>	<b>Lexique</b>	<b>445</b>
H.1	Lettres de l'alphabet grec utilisées dans cet ouvrage . . . . .	447
H.2	Table des fonctions . . . . .	447
H.3	Table des symboles mathématiques utilisés . . . . .	448
<b>I</b>	<b>Biographies</b>	<b>449</b>